Modèles de surfaces hyperboliques aléatoires

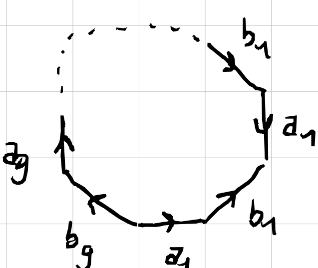
- Modèle de revêtement aléatoire :

  On se donne S^g surface de genre g munie d'une métrique hyperbolique

  $\mathrm{Hom}(\pi_1(S^g), \mathfrak{S}_N)$ morphismes du groupe fonda. à valeurs dans le groupe symétrique

  S^g a g anses :

On peut la découper avec $2g$ lacets $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ pour former un $4g$-gone



$\rightsquigarrow \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] = 1$

où $[a_i, b_i] = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$

$\longrightarrow$ présentation de $\pi_1(S^g) = \langle a_i, b_i, i = 1, \dots, g \mid \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] = 1 \rangle$

$\mathrm{Hom}(\pi_1(S^g), \mathfrak{S}_N) = \{ \sigma_i, \tau_i,\ i=1,\dots,g :$

$\prod_{i=1}^{g} [\sigma_i, \tau_i] = 1 \}$ Ensemble fini.

Formule pour le cardinal : (Hurwitz 1902)

$$|\mathrm{Hom}(\pi_1(S^g), G)| = |G|^{2g-1} \zeta^G(2g-1)$$

$$\zeta^G(s) = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \underbrace{d(\chi)}_{\text{dimension de la représentation irréductible}}{}^{-s}$$

$\rho \in \mathrm{Hom}(\pi_1(S^g), \mathfrak{S}_N) \longmapsto S_{\rho,N}$ revêtement fini de S associé à ρ.

ρ choisi uniformément $\leftrightarrow$ $S_{\rho,N}$ revêtement aléatoire uniforme.

On part du revêtement universel $\tilde{S} \simeq \mathbb{H}^2$

$$\tilde{S} \times \{1,\dots,N\} / \sim_\rho =: S_{\rho,N}$$

action de π_1 sur $\tilde{S}$

où $(\tilde{x}, i) \sim_\rho (\tilde{y}, j)$ si $\exists \gamma \in \pi_1(S)$ tq $\underline{\gamma} \cdot \tilde{x} = \tilde{y}$
et $\rho(\gamma) \cdot i = j$

$$\left.\begin{array}{cc} S_{p,N} & [(\tilde{x}, i)] \\ \downarrow & \downarrow \\ S & [\tilde{x}] \end{array}\right\} \text{ on a bien un revêtement !}$$

$$S = \tilde{S}/\pi_1(S)$$

<u>Thm</u> (Magee-Naud-Puder 2022)

$$\begin{array}{cc} S_{p,N} & \lambda_i^{old} \in sp(\Delta_{S_{p,N}}) \\ \downarrow & \updownarrow \\ S & \lambda_i \text{ vp de } \Delta_S \end{array}$$

et $\lambda_{p,N}^{new}$ les nouvelles valeurs propre de $\Delta_{S_{p,N}}$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}_N\left(\lambda_i^{new}(S_{p,N}) \geq \frac{3}{16} - \varepsilon\right) \xrightarrow[N \to \infty]{} 1$$

(ouvert pour $\frac{1}{4}$)

Thm (Magee–Hide 2021)

S surface hyperbolique à cusps (= pas compacte, de volume fini)

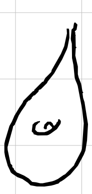
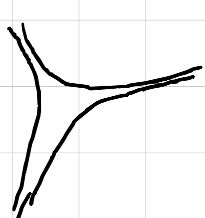
Ici $\pi_1(S) \simeq$ groupe <u>libre</u> (= + facile)

$$\mathbb{P}_N\left(\mathrm{Spec}(\Delta_{S_{\varphi,N}}) \cap [0, \tfrac{1}{4}-\varepsilon] = \mathrm{Spec}(\Delta_S) \cap [0, \tfrac{1}{4}-\varepsilon] \right) \xrightarrow[N\to\infty]{} 1$$

⚠ ici Δ_S a un spectre continu dans $[\frac{1}{4}, +\infty[$.

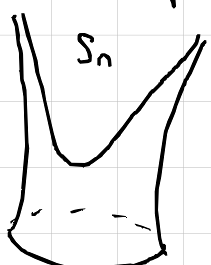
<u>Corollaire 1</u>: existence d'une suite de surfaces à cusps S_n avec $\underbrace{\lambda_1}_{\text{quotient de Rayleigh}} \geq \frac{1}{4} - o(1)$

<u>preuve</u>: partir de S pour laquelle $\lambda_1(S) \geq 1$ (c'est le cas pour S de $\chi(S) = -1$, cf Otal–Rosas)

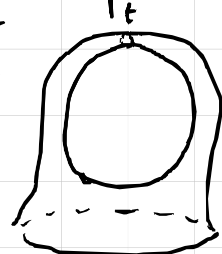
 ou 

Corollaire : existence d'une suite (S_n) de surfaces compactes, de genre $g_n \to \infty$ avec $\lambda_1(S_n) \geq \frac{1}{4} - o(1)$.

Preuve : "procédé de compactification" Buser-Burger-Dodziuk (marche pour S avec un nb pair de cusps)



$$S_n = \lim_{t \to 0} S_n^t$$



et on montre que $\liminf_{t \to 0} \lambda_1(S_n^t) \geq \lambda_1(S_n)$

Remarque : si $\rho, \sigma \in \mathrm{Hom}(\pi_1(S), \mathfrak{S}_N)$ vérifient

$\exists \tau \in \mathfrak{S}_N : \quad \rho(\gamma) = \tau^{-1}\sigma(\gamma)\tau \quad \forall \gamma \in \pi_1(S)$

Alors $S_{\rho,N} \simeq S_{\sigma(N)}$

$[\tilde{x}, i] \longrightarrow [\tilde{x}, \tau(i)]$

on pourrait vouloir plutôt considérer

$\mathrm{Hom}(\pi_1(S), \mathfrak{S}_N) / \underbrace{\mathfrak{S}_N}_{\text{automorphismes intérieurs}}$

"Modèle de Weil–Petersson"

S^g = compacte orientée de genre g ($g \geq 2$)

Espace de Teichmüller : "espace des structures de surfaces de Riemann sur S^g"

→ par thm d'uniformisation $\exists$ unique métrique hyperbolique dans chaque classe conforme.

Donc ici, "espace des $\underbrace{\text{métriques hyperboliques}}_{\text{métriques riemanniennes de courbure } -1}$ sur S^g"

surface de Riemann marquée : couple (R, f) où

- R surface de Riemann
- $f : S^g \to R$ difféo qui préserve l'orientation

(S^g est donc <u>fixée</u> et sert de surface de référence)

Relation d'équivalence $(R, f) \sim (R', f')$ si $\exists\, h : R \to R'$ biholomorphisme tel que

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[d, "\wr\, h"] \\ S^g \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f'"'] & R' \end{tikzcd}$$

$f'^{-1} \circ h \circ f : S^g \to S^g$ est isotope à l'identité.

Espace de Teichmüller $\mathcal{T}(S^g) = \{(R,f)\}/\sim$

<u>Def</u>: $(R,f) \approx (R',f')$ si $\exists$ h biholomorphisme tq

$f'^{-1} \circ h \circ f$ est un difféo de S^g (préservant l'orientation)

<u>Def</u>: $\mathcal{M}(S^g) = \{(R,f)\}/\approx$ espace des modules.

Ainsi, $\mathcal{M}(S^g) = \mathcal{T}(S^g) / MCG^+(S^g)$

où $MCG^+(S^g) = \mathrm{Diff}^+(S^g) / \underbrace{\mathrm{Diff}_0(S^g)}_{\text{difféo isotopes à l'identité.}}$

Remarque: $\mathcal{T}(S^g) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(\pi_1(S^g), G) / G$
pour $G = PSL(2,\mathbb{R}) \approx \mathrm{Aut}^+(\mathbb{H}^2)$

Avantage: analogie avec le modèle de revêtement aléatoire

⚠ cas revêtem^t aléatoire: g fixé, $G = \mathfrak{S}_N$, $N \to \infty$

cas Teichmüller: $G = PSL(2,\mathbb{R})$ fixé, $g \to \infty$.

Attention : $\mathrm{Hom}(\pi_1(S^g), G)/G$ n'est pas connexe.
cf travaux de W. Goldman.

L'image de $\mathcal{T}(S^g)$ est une des composantes connexes.

Idée de construction de l'injection :

(R, f) surface de Riemann marquée

thm d'uniformisation

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{S}, \tilde{p}) \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d] & \tilde{R} \arrow[r, "\sim", "u"', "\text{biholom.}"'] \arrow[d] & \mathbb{H}^2 \\
(S^g, p) \arrow[r, "f"] & R &
\end{tikzcd}$$

$\pi_1(S)$ agit sur $\tilde{S}$

$\gamma \in \pi_1(S) \rightsquigarrow \rho(\gamma) \in \mathrm{Aut}^+(\tilde{S})$

$\underbrace{u \tilde{f} \rho(\gamma) \tilde{f}^{-1} u^{-1}}_{\rho_{\tilde{f},u}} \in \mathrm{Aut}^+(\mathbb{H}) \simeq PSL(2, \mathbb{R})$

(les biholo de $\mathbb{H}^2$ sont les transf. de Möbius

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{où} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2,\mathbb{R})\Big).$$

⚠ $\rho_{\tilde{f},u}$ dépend de f et de u. En revanche,

$[\rho_{\tilde{f},u}] \in \mathrm{Hom}(\pi_1(S), G)/G$ est bien défini et $\underline{\perp\!\!\perp}$ de $\tilde{f}, u$.

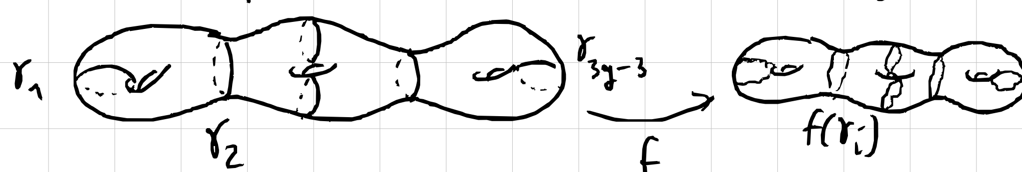
<u>Prop:</u> l'application $\mathcal{T}(S^g) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\pi_1(S^g), G)/G$

est bien définie et injective.

<u>Rmq:</u> l'image est l'ensemble des représentations fidèles et d'image discrète et cocompacte
(i.e. si $\Gamma = \rho(\pi_1(S))$, $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$ compact).

<u>Coordonnées de Fenchel-Nielsen sur $\mathcal{T}(S^g)$</u>

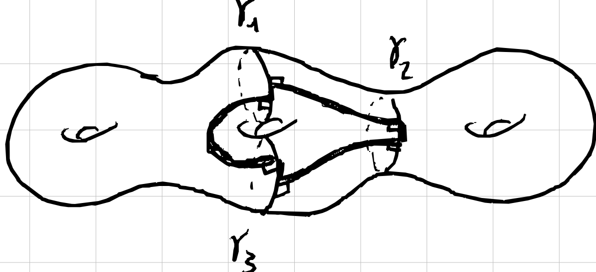
S^g découpée en pantalons  à l'aide de $3g-3$ courbes



$\ell_i = \ell_R(f(\gamma_i))$ longueur dans R de l'unique géodésique périodique homotope à $f(\gamma_i)$

$=: \ell_X(\gamma_i)$ "longueur de γ_i dans la surface marquée X"

+ twists :

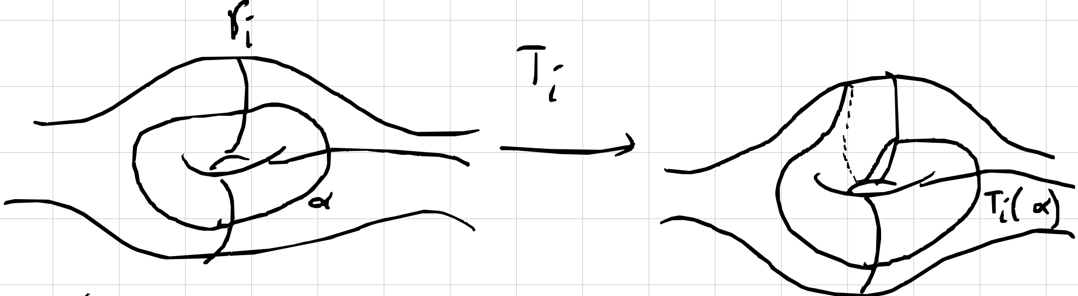


⇝ courbe en gras : permet de fixer $\theta_i \in \mathbb{R}$ paramètres de twist le long de γ_i

Coordonnées de Fenchel-Nielsen : $(\underbrace{\ell_i}_{>0}, \underbrace{\theta_i}_{\in\mathbb{R}})_{1\leq i\leq 3g-3}$.

Nb : les θ_i peuvent bien prendre toutes valeurs réelles, grâce aux twists de Dehn, des diffeo$^+$ de S^g qui ne sont pas isotopes à l'identité.

exemple:



$(R, f\circ T_i)$ est un pt différent de (R,f) dans $\mathcal{T}(S)$
(mais passe au quotient en le même point de $\mathcal{M}(S)$)

Si (R,f) a pour coordonnées $l_1, \dots l_{3g-3}$
$\theta_1, \dots \theta_{3g-3}$

Alors $(R, f\circ T_i)$ a pour coord. $l_1, \dots l_{3g-3}$
$\theta_1, \dots, \theta_{i-1}, \theta_i \pm l_i, \theta_{i+1}, \dots \theta_{3g-3}$

(le twist augmente/diminue de la longueur de la géodésique associée).

Thm: $\mathcal{T}(S^g) \simeq \mathbb{R}_+^{3g-3} \times \mathbb{R}^{3g-3}$

Thm (Wolpert 85) la forme symplectique de Weil-Petersson s'exprime dans ces coordonnées comme

$$\omega_{WP} = \sum_{j=1}^{3g-3} d\ell_i \wedge d\theta_i .$$

→ Quel que soit le choix du découpage en pantalons !

Mesure de Weil-Petersson : $\underbrace{\prod_{i=1}^{3g-3} d\ell_i \, d\theta_i}_{\mu^{WP}}$, de masse totale infinie sur $\mathcal{T}(S^g)$.

<u>Thm</u> (Wolpert 85) : la forme ω_{WP} est invariante par l'action du MCG^+ sur $\mathcal{T}(S^g)$, donc elle passe au quotient sur $\mathcal{M}(S^g)$.

<u>Thm</u> : Sur l'espace quotient $\mathcal{M}(S^g)$, μ^{WP} est finie.

<u>Prop</u> : $\exists L_g > 0$ tq toute surface hyperbolique X admet une décomposition en pantalons t.q. $\ell_X(\gamma_i) \leq L_g \quad \forall \; 1 \leq i \leq 3g-3$.

L_g = constante de Bers.

Rmq : $\mathcal{M}(S^g)$ n'est pas compact, et l'action de $MCG^+(S^g)$ sur $\mathcal{T}(S^g)$ est propre (donc $\mathcal{M}(S^g)$ est un espace séparé) mais pas libre (certaines surfaces hyperboliques ont des symétries).

→ $\mathcal{M}(S^g)$ est un orbifold et pas une variété.

1° formule d'intégration de Mirzakhani

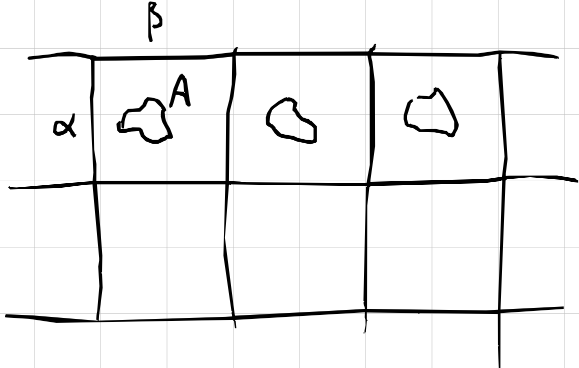
→ intégration sur un espace quotient

Cadre général (T, μ) espace mesuré, Γ groupe dénombrable qui agit sur T et qui préserve μ.

Question : comment intégrer sur $\Gamma \backslash T$? Ou comment intégrer des fonctions Γ-périodiques ?

→ Mauvaise idée : vouloir prendre la mesure image par la projection $p : T \longrightarrow \Gamma \backslash T$

Exemple de base : $T = \mathbb{R}^2$, $\Gamma = \alpha\mathbb{Z} \oplus \beta\mathbb{Z}$.



$\longrightarrow$ la préimage de A est une ∞-té de copies de A, et pour intégrer on préfère intégrer sur une seule copie !

On suppose que le quotient se passe bien et qu'on dispose d'une fonction $\chi_\Gamma \geq 0$ à décroissance rapide

$$\text{tq} \quad \sum_{\gamma \in \Gamma} \chi_\Gamma(\gamma . x) = 1 \quad \forall x \in T \quad (*)$$

<u>exemple:</u> $\chi_\Gamma(x, y) = \mathbb{1}_{[a, a+\alpha[}(x) \, \mathbb{1}_{[b, b+\beta[}(y)$

Plus généralem^t, penser à $\chi_\Gamma = \mathbb{1}_{\mathcal{D}}$ où $\mathcal{D}$ est un domaine fondamental de l'action de Γ sur T.

Lemme : si $f : T \to \mathbb{R}_+$ Γ-invariante, i-e.
$f(\gamma . x) = f(x)$, si on note $f : \Gamma \backslash T \to \mathbb{R}_+$ son image par le quotient, on pose :

$$\int_{\Gamma \backslash T} f \, d\mu = \int_T f \chi_\Gamma \, d\mu$$

et cette définition ne dépend pas de χ_Γ à partir du moment où elle vérifie $(*)$

Preuve : soit $\chi_\Gamma, \chi_\Gamma'$ qui vérifient $(*)$.

$$\int_T f(x) \chi_\Gamma(x) \underbrace{\sum_{\gamma \in \Gamma} \chi_\Gamma'(\gamma . x)}_{=1} d\mu(x)$$

$$= \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_T f(x) \chi_\Gamma(x) \chi_\Gamma'(\gamma . x) \, d\mu(x)$$

ch. var

$$= \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_T f(\gamma^{-1} x) \chi_\Gamma(\gamma^{-1} x) \chi_\Gamma'(x) d\mu(x)$$

$$= \int_T f(x) \underbrace{\sum_{\gamma} \chi_\Gamma(\gamma^{-1} x)}_{=1} \chi_\Gamma'(x) d\mu(x) = \int_T f(x) \chi_\Gamma'(x) d\mu(x)$$

$\square$

<u>Lemme</u> : Soit $F : T \to \mathbb{R}_+$. On la périodise en posant $F_\Gamma(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} F(\gamma . x)$.

$$\int_{\Gamma \backslash T} F_\Gamma \, d\mu = \int_T F \, d\mu.$$

<u>Exemple</u> : $F(x_1, x_2)$ à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^2$.

$$F_\Gamma(x_1, x_2) = \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2} F(x_1 + \alpha n, x_2 + \beta m)$$

$$\int_{\Gamma \backslash \mathbb{R}^2} F_\Gamma \, dx_1 dx_2 = \int_{\mathbb{R}^2} F \, dx_1 dx_2.$$